428. 多元体ノ賦値ニ就イテ, II

守屋美賀雄（北大）

§4. Derivierte Divisionsalgebren ノ構造

前節デハ或ル k 上ノ多元体 D カラ derivierte Divisionsalgebra $\overline{\mathrm{D}}$ ヲツクルコトガ出来ルトイフ所マデ述ベタ、所ガ D ノ賦値 Φ ハ k ノ賦値 φ ノ接続デアルカラ、k ノ元カラツクラレタ基本列ノ全体ハ矢張リ $\overline{\mathrm{D}}$ ノ中ニソノ極限元ヲ有スル、勿論コレ等ノ極限元ガ何レモ乗法ニ関シテ $\overline{\mathrm{D}}$ ノ任意ノ元ト可換デアルコトハ明デアラウ。依ッテ k ノ φ ニ関スル derivierter Körper $\overline{k}$（即 k ニ於ケル基本列ノ全体）ガ $\overline{\mathrm{D}}$ ニ含マレル証明シタイノハ

$$\underline{\overline{\mathrm{D}} = \mathrm{D} \times \overline{k}}$$

トイフコトデアル。

ソレニハ問題ヲ少々一般ニシテ，

<u>基礎体 k ガ φ ニ関シテ完全ナラバ k 上ノ n 階ノ多元体 D ハ常ニ φ ノ接続性賦値 Φ ニ関シテ完全デアル</u>。

トイフ定理ヲ証明ショウ。コノ定理ハ k ノ代数的擴大体 K ガ有限次（k ニ関シテ）ナラバ K ハ k ノ接続賦値ニ関シテ、完全デアルトイフ定理ト同種類ノモノデアル。証明ノ方法モ似テ居ル。簡単ノタメ D ノ元 α ノ賦値ガ負デナイトキ即チ $\Phi(\alpha) \geqq 0$ ナラバ α ヲ D ノ<u>整元</u>ト呼ブコトニスル。サテ α ガ D ノ整元ナラバ α ノ満足スル k ノ既約方程式

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + a_m = 0$$

ニ於テハ $\varphi(a_m)\geqq 0$ デナクテハナラヌ。k ノ有スル性質II ニヨリ $a_1, \text{------}, a_{m-1}$ ハ悉ク k ノ整元トナル、ダカラ α ノ指標方程式

$$|xE-A| = F(x) = \left(f(x)\right)^{\frac{n}{m}}$$

ノ係數ハ k ノ整元トナル。$F(x)$ ノ x^{n-1} ノ係數ヲ以下 α ノ Spur ト呼ビ $S(\alpha)$ ヲ以テアラハス。然ラバ

$$\Phi(\alpha)\geqq 0 \longrightarrow \varphi(S(\alpha))\geqq 0$$

デアル。

サテ今 D ノ k ニ關スル底元（コレヲ以下簡單ニ D ノ <u>k-基</u> ト呼ブ）ヲ $\omega_1, \omega_2, \text{------}, \omega_n$ トスレバ、之レニ k ノアル一ツノ整元 a ヲ乘ジテ $a\omega_1, \text{------}, a\omega_n$ ヲ D ノ整元ナラシムルコトガ出來ル。（k ノ賦値條件 I ニ依ル）且ツカクシテ得ラレタ $a\omega_1, \text{------}, a\omega_n$ ハ明ニ D ノ k-基ヲナシテ居ル、ソコデ便宜ノタメ $\omega_1, \omega_2, \text{------}, \omega_n$ ガ悉ク D ノ整元デアルト假定シヨウ。サテ、コノ樣ナ整元ナル k-基ヲ用ヒテ D ノアル整元 α ヲ

$$\alpha = c_1\omega_1 + \text{------} + c_n\omega_n$$

ト書キ表ハシタトキ（但シ $c_1, \text{------}, c_n$ ハ k ノ元トスル）.
コヽデ $c_1, c_2, \text{------}, c_n$ ノ賦値ハ下ニ有界デアルトイフコトヲ第一ニ證明スル、α ノ右辺ニ順次 $\omega_1, \text{------}\ \omega_n$ ヲ乘ジテソノ Spur ヲトルト

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} S(\alpha\omega_1) = c_1 S(\omega_1\omega_1) + \text{------} + c_n S(\omega_n\omega_1) \\ \quad\vdots \\ S(\alpha\omega_n) = c_1 S(\omega_1\omega_n) + \text{------} + c_n S(\omega_n\omega_n) \end{cases}$$

ヲ得ル、假定ニヨレバ $\alpha, \omega_1, \cdots\cdots, \omega_n$ ガ何レモDノ整元デアルカラ、$s(\alpha\omega_i)$, $s(\omega_i\omega_j)$, $(i, j=1, \cdots\cdots n)$ ハ何レモ k ノ整元デアル。即チ $\varphi(s(\alpha, \omega_i)) \geqq 0$, $\varphi(s(\omega_i\omega_j)) \geqq 0$.

又Dガ *halbeinfach* デアルトイフコトカラ

$$\Delta(\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n) = \begin{vmatrix} s(\omega_1\omega_1) & \cdots\cdots & s(\omega_n\omega_1) \\ \vdots & & \\ s(\omega_1\omega_n) & \cdots\cdots & s(\omega_n\omega_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

デアル。(I)カラ

$$c_i = \frac{\Delta_i}{\Delta(\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n)}$$

ヲ得ル。コヽニ Δ_i トハ $\Delta(\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n)$ ニ於イテ第 i 列ヲ $s(\alpha\omega_1), \cdots\cdots, s(\alpha\omega_n)$ デ置キカヘタ行列式デアル。サテ明カニ Δ_i 及ビ $\Delta(\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n)$ ハ k ノ整元デ且ツ後者ハ k ー基 $\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n$ ニ依ッテ、一意的ニ定マルモノ故 $\varphi(c_i)$ ハ常ニ下ニ有界デアル。依ッテ適當ナ實數 ρ ヲトレバDノ任意ノ整元 α ヲ k ノ元ヲ係數ニ有スル $\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n$ ノ一次形式トシテアラハシタトキ、ソレ等係數ノ賦値ハ常ニ ρ ヨリ小デハナイ。

サテ、次ニ α ノ賦値 $\Phi(\alpha)$ ガ十分ニ大キクナッタトスル、然ラバ k ノ或ル單位元ナラザル整元 a ニ對シテ(勿論 a ヲ適當ニトラネバナラナイ、シカシ此ノヤウナ a ハ常ニ存在スル)

$$0 < \varphi(a^m) \leqq \Phi(\alpha) < \Phi(a^{m+1})$$

ナラシムルコトガ出來ル。コヽデ $\Phi(\alpha)$ ガ増大シテ行ケバソ

レニツレテ m ガ増大シテ行ク譯デアル。明カニ $\frac{\alpha}{a^m}$ ハDノ整元、依ッテ

$$\frac{\alpha}{a^m}=d_1\omega_1+\cdots\cdots+d_n\omega_n$$

ト置イタトキ $\varphi(d_1),\cdots\cdots,\varphi(d_n)$ ハ何レモ ρ ヨリハ小サクハナイ。サテ

$$\alpha=a^m d_1\omega_1+\cdots\cdots+a^m d_n\omega_n=c_1\omega_1+\cdots\cdots+c_n\omega_n$$

デアルカラ $\omega_1,\cdots\cdots,\omega_n$ ガ k—基トイフコトカラ

$$a^m d_1=c_1,\cdots\cdots,a^m d_n=c_n$$

ヲ得ル、即チ

$$\varphi(c_i)=m\varphi(a)+\varphi(d_i)\qquad(i=1,\cdots\cdots n)$$

依ッテ今 $\Phi(\alpha)\to\infty$ トスレバ前ニ述ベタ如ク $m\longrightarrow\infty$ デアリ、從ッテ

$$\lim_{m\to\infty}\varphi(c_i)\longrightarrow\infty$$

デアラウ、即チ

$$\alpha=c_1\omega_1+\cdots\cdots+c_n\omega_n$$

ニ於イテ $\Phi(\alpha)$ ガ如何程デモ大キクナレバ、ソレニ應ジテ $\varphi(c_1),\cdots\cdots,\varphi(c_n)$ モ亦如何程デモ大キクナラナケレバイケナイトイフノデアル。（コノ逆ハ明白デアル）

サテ今、Dノ基本列

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_i,\cdots\cdots$$

ガ與ヘラレタトキ $\alpha_i=c_1^{(i)}\omega_1+\cdots\cdots+c_n^{(i)}\omega_n$（但シ $c_1^{(i)},\cdots\cdots,c_n^{(i)}$ ハ何レモ k ノ元）ト置ケバ

$$\alpha_{m_1}-\alpha_{m_2}=\left(c_1^{(m_1)}-c_1^{(m_2)}\right)\omega_1+\cdots\cdots+\left(c_n^{(m_1)}-c_n^{(m_2)}\right)\omega_n$$

トナル、サテ $\Phi(\alpha_{m_1}-\alpha_{m_2})$ ハ m_1, m_2 ガ大キクナルニツレテ、イクラデモ大キクナル譯デアルカラ（基本列ナル故）既ニ證明シタ事實ニヨリ、n個ノ元列

$$c_j^{(1)}, \cdots\cdots c_j^{(i)}, \cdots\cdots \qquad (j=1, \cdots\cdots n)$$

ガ基本列ヲツクラネバナラナイトイフコトガ出テクル。所デkハ$\mathfrak{p}$ニ關シテ完全デアル故上記n個ノ基本列ハ何レモkニ於テ極限元 $c_1, \cdots\cdots, c_n$ヲ有スル、明カニ

$$\alpha = c_1\omega_1 + \cdots\cdots + c_n\omega_n$$

ハ$\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_i, \cdots\cdots$ノ極限元デアラウ。依ツテDハ$\Phi$ニ關シテ完全デアル。即チ

基礎体kガ$\mathfrak{p}$ニ關シテ完全ナラバDハ$\mathfrak{p}$ノ接續賦値Φニ關シテ完全デアル。

サテ、愈々本節ノ初メノ問題ニ戻ル。kガ relativ perfektor Körper デDガkニ關シテ有限階ノ多元体ナルトキ、Dカラ derivierte Divisionsalgebra $\overline{D}$ガ出テクル、ソシテ$\overline{D}$ハkノ derivierter Körper $\bar{k}$ヲ含ム、明カニ

$$D \times \bar{k} \subseteq \overline{D}$$

デアラウ。次ニ$D \times \bar{k}$ハ$\overline{D}$ノ部分環ナル故$\bar{k}$上ノ多元体、且ツ$\bar{k}$ハ$\mathfrak{p}$ニ關シテ完全体ダカラ$D \times \bar{k}$ハΦニ關シテ又、完全デアル。ソシテ$D \times \bar{k}$ハDヲ含ム、然ラバ$\overline{D}$ガDノ derivierte Divisionsalgebra トイフコトヨリ

$$\overline{D} \subseteq D \times \bar{k}$$

即チ $\overline{D} = D \times \overline{k}$

デアル。

昭和十一年度1月—6月分ノ會費金貳圓也

ヲ至急御拂込ミ下サイ。

大阪市北區

大阪帝國大學
理學部數學教室　清水辰次郎

振替口座番號　大阪一七七四三番

前期會計決算ハ第84号ニ報告シテアリマス。